

الصفحة	2	RS 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2021 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (ا) و (ب)	∞
4				

**التمرين 1: (8 نقط)**

الجزء I: - نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على المجال  $I = ]-\infty, 1[$  بما يلي:  $f(x) = \ln(1-x)$   
و ليكن  $(C)$  تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1- أ) بين أن الدالة  $f$  متصلة على  $I$  0.25

ب) بين أن الدالة  $f$  تناقصية قطعا على  $I$  0.25

ج) احسب  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  0.75

د) أول مبيانيا النتائج المحصل عليها. 0.5

هـ) اعط جدول تغيرات  $f$  0.25

2- أ) بين أن المنحنى  $(C)$  مقعر. 0.25

ب) مثل مبيانيا المنحنى  $(C)$  في المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  0.25

3- أ) بين أن الدالة  $f$  تقابل من  $I$  نحو  $\mathbb{R}$   
نرمز بالرمز  $f^{-1}$  لتقابلها العكسي. 0.25

ب) حدد  $f^{-1}(x)$  من أجل  $x \in \mathbb{R}$  0.25

ج) تحقق أن:  $f^{-1}(-1) = 1 - e^{-1}$  0.25

الجزء II- لكل عدد حقيقي  $x$  و لكل عدد صحيح طبيعي  $n \geq 2$ ، نضع:

$$P_n(x) = x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n}$$

1- بين أن لكل عدد صحيح طبيعي  $n \geq 2$ ، يوجد عدد حقيقي وحيد  $x_n \in ]0, 1[$  بحيث:  $P_n(x_n) = 1$  0.5

2- حدد العدد الحقيقي  $\alpha = x_2$  و تحقق أن:  $0 < \alpha < 1$  0.5

3- أ) بين أن لكل عدد صحيح طبيعي  $n \geq 2$ ، لدينا:  $P_{n+1}(x_n) > 1$  0.5

ب) استنتج أن المتتالية  $(x_n)_{n \geq 2}$ ، المعرفة حسب ما سبق، تناقصية قطعا. 0.5

ج) بين أن لكل عدد صحيح طبيعي  $n \geq 2$ ، لدينا:  $x_n \in ]0, \alpha]$  0.25

د) بين أن المتتالية  $(x_n)_{n \geq 2}$  متقاربة. 0.25

4- لكل عدد حقيقي  $x \in I$  و لكل عدد صحيح طبيعي  $n \geq 2$ ، نضع:  $f_n(x) = f(x) + P_n(x)$

أ) بين أن:  $f'_n(x) = \frac{-x^n}{1-x}$  ;  $(\forall x \in I)$  ;  $(\forall n \geq 2)$  0.5

ب) بين أن:  $|f'_n(x)| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$  ;  $(\forall x \in [0, \alpha])$  ;  $(\forall n \geq 2)$  0.25

الصفحة	3	RS 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2021 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	∞
4				

(ج) استنتج أن:  $(\forall x \in [0, \alpha]) ; (\forall n \geq 2) \quad |f_n(x)| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$  0.5

(د) بين أن:  $(\forall n \geq 2) \quad |f(x_n) + 1| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$  0.5

(هـ) استنتج قيمة  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$  0.5

التمرين 2: (4 نقط)

نعتبر الدالة  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي:  $F(x) = \int_0^x e^{t-\frac{t^2}{2}} dt$

1- أ) حدد إشارة  $F(x)$  حسب قيم  $x$  0.5

ب) بين أن الدالة  $F$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و احسب مشتقتها الأولى  $F'(x)$  1

2- أ) باستعمال طريقة المكاملة بالأجزاء، بين أن:  $\int_0^1 F(x) dx = \int_0^1 (1-x) e^{x-\frac{x^2}{2}} dx$  0.5

ب) احسب  $\int_0^1 F(x) dx$  0.5

3- نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بما يلي:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( (n-k) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{x-\frac{x^2}{2}} dx \right)$$

أ) تحقق أن:  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) F\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) F\left(\frac{k}{n}\right)$  0.5

ب) بين أن:  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F\left(\frac{k}{n}\right)$  0.5

ج) استنتج أن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 1}$  متقاربة و حدد نهايتها. 0.5

التمرين 3: (4 نقط)

$m$  عدد عقدي مخالف للعددين 2 و  $-i$  و المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر  $(O; \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$  :  $z^2 - (m-i)z - im = 0$  :  $(E)$

1) أ- تحقق أن مميز المعادلة  $(E)$  هو  $(m+i)^2$  0.5

ب- حدد  $z_1$  و  $z_2$  حلي المعادلة  $(E)$  0.5

ج - علما أن  $m = e^{i\frac{\pi}{8}}$  ، اكتب العدد  $z_1 + z_2$  على الشكل الأسّي. 0.75

2) نعتبر النقط  $A$  و  $B$  و  $M$  التي ألحاقها على التوالي 2 و  $-i$  و  $m$  ولتكن  $M'$  مماثلة  $M$  بالنسبة للمحور التخيلي.

الصفحة	RS 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2021 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	∞
4	4		

ا- حدد لحق النقطة $M'$ بدلالة $m$	0.5
ب - حدد بدلالة $m$ ، لحق النقطة $N$ بحيث يكون الرباعي $ANM'B$ متوازي الأضلاع	0.75
ج - بين أن المستقيمين $(AM)$ و $(BM')$ متعامدين إذا و فقط إذا كان: $\operatorname{Re}((2-i)m) = \operatorname{Re}(m^2)$	1

#### التمرين 4: (4 نقط)

ليكن  $a$  عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 2. نضع:

$$A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6$$

ليكن  $p$  عددا أوليا فرديا بحيث:  $p$  يقسم  $A$

1- (أ) بين أن  $a^7 \equiv 1 [p]$ ، استنتج أن:  $a^{7^n} \equiv 1 [p]$  ;  $\forall n \in \mathbb{N}$  1

(ب) بين أن  $a$  و  $p$  أوليان فيما بينهما، استنتج أن:  $a^{(p-1)m} \equiv 1 [p]$  ;  $\forall m \in \mathbb{N}$  1

2- نفترض أن  $7$  لا يقسم  $p-1$

(أ) بين أن:  $a \equiv 1 [p]$  0.5

(ب) استنتج أن:  $p = 7$  0.5

3- بين أنه إذا كان  $p$  عددا أوليا فرديا بحيث:  $p$  يقسم  $A$  فإن:  $p = 7$  أو  $p \equiv 1 [7]$  1

انتهى



**1**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -1 \times 0 = \boxed{0}$

(د-1) تأويل هندسي:

بما أنه:  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$

فإن المستقيم الذي معادلته:  $y = 1$   
مقارب عمودي لـ: (C).

أيضا:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

إذا (C) يتقبل فرعاً مثلجياً في اتجاه محور الأفاصل بجوار  $(-\infty)$ .

(هـ-1) جدول التغيرات:

$(\forall x < 1) : f'(x) < 0$

x	$-\infty$	1
$f'(x)$		-
f	$+\infty$	$-\infty$

(أ-2) "تقعر" (C):

$\forall x < 1 \quad f'(x) = \frac{-1}{1-x}$

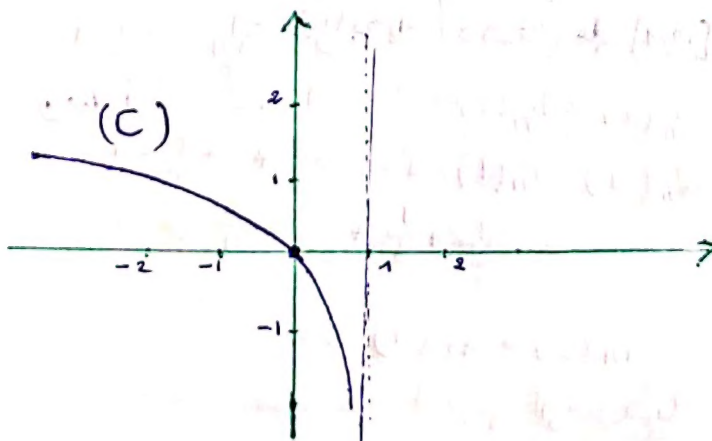
اذن  $f'$  قس على I (دالة جذرية معرفة على I)  
وبالتالي f قس مرتين على I ولدينا:

$(\forall x \in I) \quad f''(x) = (f'(x))' = -\left(\frac{1}{1-x}\right)'$

$= + \frac{(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{-1}{(1-x)^2}$

بما أنه:  $f'' < 0$  فإن (C) مقعر على I.

(ب-2) تفصيل (C):



دحيح مقترح لموضوع الرياضيات

شعبة العلوم الرياضية  
الصفحة الاستدراكية  
2020  
2021

التمرين 1:

الجزء I

$I = ]-\infty; 1[$

$(\forall x \in I) \quad f(x) = \ln(1-x)$

(أ-1) الاتصال على I:

الدالة:  $x \mapsto 1-x$  متصلة على I.

و  $u(I) = u(]-\infty; 1[)$

$= ]0; +\infty[$

وبما أنه ln متصلة على  $]0; +\infty[$

فإن:  $f = \ln \circ u$  متصلة على I.

(ب-1) الرتبة:

f قابلة للاشتقاق على I ولدينا:

$(\forall x \in I); \quad f'(x) = \frac{(1-x)'}{1-x} = \frac{-1}{1-x}$

$x \in I \Rightarrow x < 1 \Rightarrow 1-x > 0$

$\Rightarrow \frac{-1}{1-x} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$

اذن  $f$  تناقصية قطعا على I

(ج-1)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1-x)$

$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(t) = \boxed{-\infty}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1-x)$

$= \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(t) = \boxed{+\infty}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{x} \times \frac{\ln(1-x)}{1-x}$

ولدينا:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1-x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = \boxed{-1}$

و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1-x)}{1-x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = \boxed{0}$

اذن:



2

المعادلة:  $Q_n(x) = 0$   
 تقبل حلا وحيدا:  $x_n \in ]0, 1[$   
 اذن:

لكل  $n \geq 2$  يوجد  $x_n \in ]0, 1[$  وحيد  
 بحيث:  
 $P_n(x_n) = 1$

2  $P_2(x) = 1$  حل للمعادلة  $\alpha = x_2$

ولدينا  $P_2(\alpha) = 1$   
 $\Leftrightarrow \alpha + \frac{\alpha^2}{2} = 1 \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha - 2 = 0$   
 $\Delta = 12 > 0$

حلا:  $\alpha_1 = -1 - \sqrt{3}$ ;  $\alpha_2 = -1 + \sqrt{3}$   
 اذن:  $\alpha = \alpha_1$  أو  $\alpha = \alpha_2$

بما أن:  $0 < \alpha < 1$  فإن  $\alpha \neq \alpha_1$   
 وبالتالي:  
 $\alpha = \alpha_2 = -1 + \sqrt{3}$   
 التحقق:

$\sqrt{3} > 1 \Rightarrow -1 + \sqrt{3} > 0 \Rightarrow \alpha > 0$   
 $\alpha = -1 + \sqrt{3} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{3} < 2$   
 $\Leftrightarrow 3 < 4$   
 هذه العبارة صحيحة.

اذن:  $\alpha < 1$

نستنتج أن:  $0 < \alpha < 1$

3-1  $P_{n+1}(x_n) > 1$  ليكن  $n \geq 2$ . نثبت أن:

نعلم أن:  $P_n(x_n) = 1$   
 ولدينا:

$P_{n+1}(x) = x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1}$   
 $P_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n+1}$

اذن:  $P_{n+1}(x_n) = P_n(x_n) + \frac{x_n^{n+1}}{n+1}$   
 $= 1 + \frac{x_n^{n+1}}{n+1} > 1$

(لأن:  $\frac{x_n^{n+1}}{n+1} > 0$ )

3-1  $f$  متصلة وتناقصية قطعاً  
 على  $I$ : اذن  $f$  تقابل من  $I$  نحو:  
 $f(I) = ] \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) [$   
 $= ] -\infty; +\infty [ = \mathbb{R}$ .

3-ب  $f^{-1}$  تحديد

$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow I$

ليكن  $x$  من  $\mathbb{R}$  و  $y$  من  $I$ .

$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = \ln(1-y)$

$\Leftrightarrow 1-y = e^x \Leftrightarrow y = 1 - e^{-x}$   
 اذن:

$(\forall x \in \mathbb{R}) f^{-1}(x) = 1 - e^{-x}$

3-ج التحقق:

بما أن:  $f^{-1}(x) = 1 - e^{-x}$   
 فإن:

$f^{-1}(-1) = 1 - e^{-1}$

الجزء II

$\forall n \geq 2, P_n(x) = x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n}$

1  $n \geq 2$  ليكن

نضع:  $Q_n(x) = P_n(x) - 1$

الدالة  $Q_n$  متصلة على المجال  $[0, 1]$

$Q_n$  ق.ت. على  $\mathbb{R}$  (حدودية)

و  $Q'_n(x) = 1 + x + \dots + x^{n-1} > 0$   
 لكل  $x$  من  $[0, 1]$ .

اذن:  $Q_n$  تزايدية قطعاً على  $[0, 1]$

وبما أن:  $Q_n(0) = P_n(0) - 1 = -1 < 0$

$Q_n(1) = P_n(1) - 1 = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - 1$   
 $= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > 0$

فإن:

$Q_n(0) \times Q_n(1) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيمة الوسطية

3 (ب-4) ليكن  $n \geq 2$  و  $x \in [0; \alpha]$

لدينا:  $-x^n \leq 0$  و:

$$1 - x \geq 1 - \alpha > 0$$

$$f'_n(x) = \frac{-x^n}{1-x} \leq 0 \quad \text{اذن}$$

$$|f'_n(x)| = \frac{x^n}{1-x} \quad \text{اذن}$$

$$h: x \mapsto \frac{x^n}{1-x} \quad \text{الدالة:}$$

ق.ش على  $[0; \alpha]$  (دالة جذرية و  $\alpha < 1$ ) و لدينا:

$$\forall x \in [0; \alpha]: h'(x) = \frac{nx^{n-1}(1-x) + x^n}{(1-x)^2} \\ = \frac{nx^{n-1} + (n+1)x^n}{(1-x)^2} \geq 0$$

اذن:  $h$  تزايدية على  $[0; \alpha]$

$$\forall x \in [0; \alpha] \quad h(0) \leq h(x) \leq h(\alpha)$$

$$0 \leq \frac{x^n}{1-x} \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$

وبالتالي:

$$(\forall n \geq 2)(\forall x \in [0; \alpha])$$

$$|f'_n(x)| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$

(ج-4) ليكن  $n \geq 2$ .

$f_n$  متصلة على  $[0; \alpha]$ .

وقابلة للاشتقاق على المجال  $]0; \alpha[$

اذن حسب مبرهنة التزايديات المتتالية:

$$\forall x \in ]0; \alpha[ \quad \exists c_x \in ]0; x[$$

$$f_n(x) - f_n(0) = f'_n(c_x)(x - 0)$$

$$f_n(x) = x f'_n(c_x)$$

$$(f_n(0) = 0) \quad \text{لأن:}$$

$$\forall x \in [0; \alpha] \quad |f'_n(x)| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \quad \text{نعم أن:}$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow |x| \leq 1$$

ولدينا:

اذن:

3 (ب-3) الاستنتاج:

ليكن  $n \geq 2$ . لدينا مما سبق:

$$P_{n+1}(x_n) > 1$$

$$\Leftrightarrow P_{n+1}(x_n) > P_{n+1}(x_{n+1})$$

وبما أن  $P_{n+1}$  تزايدية قطعا على

$$\text{المجال } [0; 1] \quad \left( \text{لأن: } \forall x \in [0; 1] \quad P'_{n+1}(x) = 1 + x + \dots + x^n > 0 \right)$$

$$x_n, x_{n+1} \in ]0; 1[$$

$$x_n > x_{n+1} \quad \text{فإن:}$$

$$x_{n+1} - x_n < 0 \quad \text{اذن:}$$

وبالتالي  $(x_n)_{n \geq 2}$  تناقصية قطعا.

(ج-3) بما أن  $(x_n)_{n \geq 2}$  تناقصية

فإنها مكبورة بعدها الأول  $x_2$ . اذن:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < x_n \leq x_2$$

$$\text{علم أن: } x_2 = \alpha \quad \text{اذن:}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad 0 < x_n \leq \alpha$$

(د-3)  $(x_n)_{n \geq 2}$  تناقصية ومكبورة

اذن فهي متقاربة.

(4) لكل  $x$  من  $I$  و  $n \geq 2$ :

$$f_n(x) = f(x) + P_n(x)$$

(أ-4)  $f_n$  ق.ش على  $I$  كمجموع

دالتين قابلتين للاشتقاق على  $I$ .

ولدينا:

$$(\forall x \in I). (\forall n \geq 2) \quad f'_n(x) = f'(x) + P'_n(x)$$

$$= \frac{-1}{1-x} + 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$$

$$= \frac{-1}{1-x} + \frac{1-x^n}{1-x} \quad (x \neq 1 \quad \text{لأن:})$$

$$= \frac{-1 + 1 - x^n}{1-x} = \frac{-x^n}{1-x}$$

$$(\forall x \in I) \quad \boxed{f'_n(x) = \frac{-x^n}{1-x}} \quad \text{اذن:}$$



4

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad F(x) = \int_0^x e^{t-t^2/2} dt$$

استار (أ-1)

ليكن  $x \in \mathbb{R}$  لدينا:

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad e^{t-t^2/2} > 0$$

$$x \geq 0 \Rightarrow \int_0^x e^{t-t^2/2} dt \geq 0$$

$$x \leq 0 \Rightarrow \int_0^x e^{t-t^2/2} dt = - \int_x^0 e^{t-t^2/2} dt \leq 0$$

$$\left( \int_x^0 e^{t-t^2/2} dt \geq 0 \right) \quad (\text{لأن:})$$

$$x \in \mathbb{R}^+ \text{ إذا كان } F(x) \geq 0$$

$$x \in \mathbb{R}^- \text{ إذا كان } F(x) \leq 0$$

ليكن  $x \in \mathbb{R}$  (أ-1 ب)

الدالة  $t \mapsto e^{t-t^2/2}$  متصلة على  $\mathbb{R}$  (مركب دالتين متصلتين على  $\mathbb{R}$ )

اذن  $\vartheta$  تقبل دالة أصلية  $G$  على

$$F(x) = \int_0^x \vartheta(t) dt = G(x) - G(0)$$

حيث:  $G$  قابلة للاشتقاق في  $x$  و:

$$G'(x) = \vartheta(x)$$

اذن  $F$  قابلة للاشتقاق في  $x$ .

وبالتالي:

$$\boxed{\text{لكل } x \text{ من } \mathbb{R} : F \text{ قابلة للاشتقاق في } x}$$

حساب العدد المشتق  $F'(x)$ :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad F'(x) = G'(x) - G'(0) = \vartheta(x) = e^{x-x^2/2}$$

$$\int_0^1 F(x) dx$$

(أ-2)

$$\begin{cases} p'(x) = \vartheta(x) \\ q(x) = x \end{cases} \quad \text{نضع:} \quad \begin{cases} p(x) = F(x) \\ q'(x) = 1 \end{cases} \quad \text{اذن:}$$

$$|f_n(x)| = |x| |f_n'(x)|$$

$$\leq 1 \times \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$

وبالتالي:

$$(\forall n \geq 2) (\forall x \in ]0, \alpha])$$

$$|f_n(x)| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$

في حالة  $x=0$  فإذن:

$$|f_n(0)| = 0 \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$

اذن فهي صحيحة لكل  $x \in [0, \alpha]$  خاصة:

$$(\forall n \geq 2) (\forall x \in [0, \alpha])$$

$$|f_n(x)| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$

نعلم مما سبق أن: (أ-4 ب)

$$(\forall n \geq 2) (\forall x \in [0, \alpha])$$

$$|f_n(x)| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$

وبما أن:  $x_n \in ]0, \alpha]$  فإذن:

$$|f_n(x_n)| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$

$$f_n(x_n) = f(x_n) + p_n(x_n) = f(x_n) + 1$$

$$(\forall n \geq 2) |f(x_n) + 1| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$

استنتاج قيمة  $\lim x_n$  (أ-4 ج)

$$0 < \alpha < 1 \Rightarrow \lim \alpha^n = 0$$

$$(\forall n \geq 2) 0 \leq |f(x_n) + 1| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$$

$$\lim f(x_n) = -1$$

$$(\forall n \geq 2); x_n = f^{-1}(f(x_n))$$

$f^{-1}$  دالة متصلة على  $\mathbb{R}$  (لأن  $f$  متصلة)

$$\lim x_n = \lim f^{-1}(f(x_n))$$

$$= f^{-1}(-1) = 1 - e^{-1}$$

$$\boxed{\lim x_n = 1 - e^{-1}} \quad \text{أي أن:}$$

**5** 
$$= \sum_{k=1}^{n-1} (n-k+1) F\left(\frac{k}{n}\right)$$
  
 (يمكن استبدال  $m$  بأي حرف يخالف  $n$ )  
 وبالتالي:

$$U_n = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n (n-k+1) F\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) F\left(\frac{k}{n}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^{n-1} (n-k+1) F\left(\frac{k}{n}\right) + F\left(\frac{n}{n}\right) - \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) F\left(\frac{k}{n}\right) - n F\left(\frac{0}{n}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^{n-1} ((n-k+1) - (n-k)) F\left(\frac{k}{n}\right) + F\left(\frac{n}{n}\right) - 0 \right)$$

(لأن:  $F\left(\frac{0}{n}\right) = 0$ )

$$U_n = \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^{n-1} F\left(\frac{k}{n}\right) + F\left(\frac{n}{n}\right) \right)$$

اذن:  $(\forall n \geq 1): U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F\left(\frac{k}{n}\right)$

**3-ج** استنتاج التقارب:

لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  لدينا:

$$U_n = \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^n F\left(\frac{k}{n}\right)$$

وبما أن الدالة  $F$  متصلة وتزايدية على  $[0; 1]$  (تكامل دالة موجبة) فإن  $(U_n)_{n \geq 1}$  متقاربة.

تعليل  $F$  تزايدية: ليكن  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{R}$  بحيث:  $x \geq y$  لدينا:

$$F(x) - F(y) = \int_y^x v(t) dt$$

$$\left. \begin{array}{l} (\forall t \in \mathbb{R}) v(t) > 0 \\ x \geq y \end{array} \right\} \Rightarrow \int_y^x v(t) dt \geq 0$$

اذن:  $x \geq y \Rightarrow F(x) \geq F(y)$   
 ومنه  $F$  تزايدية

$$\int_0^1 F(x) dx = [x F(x)]_0^1 - \int_0^1 x v(x) dx$$

$$= F(1) - \int_0^1 x v(x) dx$$

$$= \int_0^1 v(x) dx - \int_0^1 x v(x) dx$$

$$= \int_0^1 (1-x) v(x) dx$$

اذن:  $\int_0^1 F(x) dx = \int_0^1 (1-x) e^{x-x^2/2} dx$

**2-ب** حساب:  $\int_0^1 F(x) dx$

بما أن:  $\left(x - \frac{x^2}{2}\right)' = 1 - x$  فإن:

$$\int_0^1 (1-x) e^{x-\frac{x^2}{2}} dx = \left[ e^{x-\frac{x^2}{2}} \right]_0^1$$

اذن:  $\int_0^1 F(x) dx = e^{1-\frac{1}{2}} - e^0 = e^{\frac{1}{2}} - 1$

$$\int_0^1 F(x) dx = \sqrt{e} - 1$$

**3** لكل  $n \geq 1$  نضع:

$$U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( (n-k) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{x-\frac{x^2}{2}} dx \right)$$

**3-أ** التحقق:

ليكن  $n \in \mathbb{N}^*$ . لكل  $k \in [0; n-1]$  لدينا:

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^{\frac{k+1}{n}} v(x) dx + \int_{\frac{k}{n}}^0 v(x) dx$$

$$= \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} v(x) dx \quad (\text{علاقة سأل})$$

اذن:  $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} v(x) dx$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) F\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) F\left(\frac{k}{n}\right)$$

**3-ب** نضع:  $m = k+1$

اذن:  $1 \leq m \leq n$  و  $k = m-1$   
 ولدينا:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (n-k) F\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

$$= \sum_{m=1}^n (n-m+1) F\left(\frac{m}{n}\right)$$



6)  $z_1 + z_2$  : فإن الكتابة الأسية لـ  $z_1 + z_2$  هي:

$$2 \sin\left(\frac{3\pi}{16}\right) e^{-i\frac{3\pi}{16}}$$

2) لكن  $A(2)$  و  $B(-i)$  و  $M(m)$

2-1) ليكن  $m'$  لحيق  $M'$

$M'$  مماثلة  $M$  بالنسبة للمحور التخيلي

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(m') = -\operatorname{Re}(m) \\ \operatorname{Im}(m') = \operatorname{Im}(m) \end{cases}$$

اذن:

ومنه:

$$m' = -(\operatorname{Re}(m) - i \operatorname{Im}(m)) = -\overline{m}$$

2-ب) ليكن  $n$  لحيق  $N$

$ANM'B$  متوازي أضلاع يعني أن:

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BM'} \Leftrightarrow \operatorname{aff}(\overrightarrow{AN}) = \operatorname{aff}(\overrightarrow{BM'})$$

$$\Leftrightarrow m - 2 = m' + i$$

$$\Leftrightarrow n = 2 + i - \overline{m}$$

2-ج)  $(BM') \perp (AM)$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{BM'}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{m-2}{m'+i}\right) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{m-2}{m'+i}\right) = 0$$

ولذا:

$$\frac{m-2}{m'+i} = \frac{(m-2)(\overline{m'+i})}{|m'+i|^2}$$

$$= \frac{(m-2)(-\overline{m} + i)}{|-\overline{m} + i|^2}$$

$$= \frac{(m-2)(-m-i)}{|-\overline{m} + i|^2}$$

$$= \frac{-m^2 + (2-i)m + 2i}{|-\overline{m} + i|^2}$$

اذن:  $\operatorname{Re}\left(\frac{m-2}{m'+i}\right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(-m^2 + (2-i)m) = 0$

$$\Leftrightarrow -\operatorname{Re}(m^2) + \operatorname{Re}((2-i)m) = 0$$

حساب النهاية:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n F\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 F(x) dx = \sqrt{e} - 1$$

التصريح 3: ليكن  $m \in \mathbb{C} - \{2, -i\}$

$$(E): z^2 - (m-i)z - im = 0$$

1-أ) التحقق:

$$\begin{aligned} \Delta &= (m-i)^2 + 4im \\ &= m^2 - 2mi + i^2 + 4im \\ &= m^2 + 2mi + i^2 = (m+i)^2 \end{aligned}$$

1-ب) بما أن  $-i \neq m$

فإن  $m+i \neq 0$  اذن  $\Delta \neq 0$  ومنه المعادلة تملك حلين عقديين:

$$z_1 = \frac{m-i-m-i}{2} = -i$$

$$z_2 = \frac{m-i+m+i}{2} = m$$

1-ج) نأخذ:  $m = e^{i\pi/8}$

اذن:  $i\pi/8$  و  $i\pi/2$

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= m - i = e^{i\pi/8} - e^{i\pi/2} \\ &= e^{i\theta} (e^{i(\frac{\pi}{8}-\theta)} - e^{i(\frac{\pi}{2}-\theta)}) \end{aligned}$$

حيث:  $\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{16}$

اذن:  $z_1 + z_2 = e^{i\frac{5\pi}{16}} \left( e^{-\frac{3\pi}{16}i} - e^{\frac{3\pi}{16}i} \right)$

$$= 2i \sin\left(-\frac{3\pi}{16}\right) e^{i\frac{5\pi}{16}}$$

$$= 2 \sin\left(-\frac{3\pi}{16}\right) (-i) e^{i\frac{5\pi}{16}}$$

$$= 2 \sin\left(\frac{3\pi}{16}\right) e^{i\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{16}\right)}$$

$$= 2 \sin\left(\frac{3\pi}{16}\right) e^{-\frac{3\pi}{16}i}$$

بما أن  $2 \sin\left(\frac{3\pi}{16}\right) > 0$

7

الاستنتاج:

بما أن  $a$  و  $p$  أوليان فيما بينهما فإن  
حسب مبرهنة فيرما Fermat :

$$a^{p-1} \equiv 1 [p]$$

اذن:

$$(\forall m \in \mathbb{N}) (a^{p-1})^m \equiv 1^m [p]$$

$$\boxed{(\forall m \in \mathbb{N}) a^{(p-1)m} \equiv 1 [p]}$$

(2) نفترض أن:  $7 \nmid p-1$

(1-2) نبينا أن:  $a \equiv 1 [p]$

لدينا  $7$  فردي ولا يقسم  $p-1$  (زوجي)

$$7 \wedge (p-1) = 1 \quad \text{اذن:}$$

ومنه حسب مبرهنة بيزوت Bézout

$$\exists (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \quad (p-1)m + 7n = 1$$

$$a^1 = a^{(p-1)m + 7n} \quad \text{زيادة:}$$

$$= a^{(p-1)m} \times a^{7n}$$

$$\begin{cases} a^{(p-1)m} \equiv 1 [p] \\ a^{7n} \equiv 1 [p] \end{cases} \quad \text{نعلم مما سبق أن:}$$

اذن:

$$a \equiv 1 \times 1 [p]$$

$$\boxed{a \equiv 1 [p]} \quad \text{أي أن:}$$

(3-ب) الاستنتاج:

$$\begin{cases} a \equiv 1 [p] \\ p \mid A \end{cases} \quad \text{نقلر مما سبق أن:}$$

$$\begin{cases} A \equiv \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{7 \text{ حود}} [p] \\ A \equiv 0 [p] \end{cases} \quad \text{اذن:}$$

$$7 \equiv 0 [p] \quad \text{ومنه:}$$

$$p \mid 7 \quad \text{لكن } p \text{ عدد أولي}$$

$$\boxed{p = 7} \quad \text{اذن}$$

$$(BM') \perp (AM)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}((2-i)^m) = \operatorname{Re}(m^2)$$

المتميز 4:

$$a \in \mathbb{N} \quad \text{و} \quad a \geq 2$$

$$A = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6$$

$p$  أولي فردي يقسم  $A$

(1-1) بما أن  $a \neq 1$  فإن:

$$A = \frac{a^7 - 1}{a - 1}$$

اذن:

$$(a-1)A = a^7 - 1$$

ولدينا:

$$p \mid A \Rightarrow p \mid (a-1)A$$

$$\Rightarrow p \mid a^7 - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{a^7 \equiv 1 [p]}$$

الاستنتاج:

لدينا:  $a^7 \equiv 1 [p]$  اذن:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) (a^7)^n \equiv 1^n [p]$$

ومنه:

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) a^{7n} \equiv 1 [p]}$$

"يمكن أيضا استعمال:

$$a^{7n} - 1 = (a^7 - 1)(a^{7(n-1)} + \dots + a^7 + 1)$$

(4-ب) نضع:  $d = p \wedge a$

$$1 \leq d \quad \text{اذن:}$$

$$\begin{cases} d \mid p \\ p \mid a^7 - 1 \end{cases} \Rightarrow d \mid a^7 - 1$$

$$d \mid a \Rightarrow d \mid a^7$$

و:

ومنه:

$$d \mid a^7 - (a^7 - 1) = 1$$

$$\boxed{d = 1} \quad \text{اذن: } d \leq 1 \quad \text{ومنه:}$$

وبالتالي:

$$\boxed{a \text{ و } p \text{ أوليان فيما بينهما}}$$



8

3) لیکن  $p$  عدد اولیا فرمایا  $p \mid A$

لدینا :

$$(7 \mid p-1) \text{ أو } (7 \nmid p-1)$$

$$(7 \mid p-1) \text{ أو } (p \equiv 1[7])$$

وحسب ماسبق :

$$\left. \begin{array}{l} 7 \nmid p-1 \\ p \mid A \end{array} \right\} \Rightarrow p=7$$

اذن :

$$(p=7) \text{ أو } (p \equiv 1[7])$$

— \* \* \* fin \* \* \* —

تکر بحمد الله وتوفيقه .